УДК 621.833

А.М. ОНИШКОВА, соискатель ЮФУ, главный специалист ООО ИТСК, Ростов-на-Дону, Россия

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ С ПОВЕРХНОСТНЫМ ТРЕНИЕМ

Разработан численный алгоритм решения пространственной контактной задачи с поверхностным трением, заключающийся в определении минимума некоторого квадратичного функционала, заданного в области, содержащей неизвестную границу. В качестве неизвестной границы выступает область сцепления. Неизвестная граница определяется из условий минимальности функционала. Для поиска минимума использованы различные методы, в частности, генетические алгоритмы.

Розроблено чисельний алгоритм рішення просторової контактної задачі з поверхневим тертям, що базується на визначенні мінімуму деякого квадратичного функціоналу, який задано в області, що містить невідому границю. У якості невідомої границі виступає область зчеплення. Невідома границя визначається з умов мінімальності функціоналу. Для пошуку мінімуму використані різні методи, наприклад, генетичні алгоритми.

The numerical algorithm of a solution of a space contact problem with the superficial friction, consisting in definition of a minimum of some quadratic functional set in area, containing unknown boundary is developed. As unknown boundary the tripping area appears. The unknown boundary is defined from functional minimality conditions. For minimum search various methods, in particular, genetic algorithms are used.

Большой интерес представляют исследования в области пространственных контактных задач стационарного качения упругих тел. Задачи указанного типа возникают в различных областях техники при разработке методов оценки работоспособности элементов машин и конструкций, эксплуатация которых сопровождается явлением взаимного обкатывания деформированных тел при наличии поверхностного трения [1]. Несмотря на интенсивные исследования, вопросы контактно-усталостной долговечности остаются актуальными. Износ, питтинг, "серая пятнистость", глубинное выкрашивание, задиры – далеко не полный перечень негативных результатов контактного взаимодействия [2].

Вопросы прочности зон псевдо-чистого качения контактирующих тел относятся к области наименее исследованных в контактных задачах. Для практики эта зона, не смотря на отсутствие проскальзывания тел как абсолютно жестких, представляет опасность, поскольку очаги контактных разрушений первоначально возникают именно в этой области. Так в технических нормативах по проектированию подшипников качения выделяют режимы "чистое качение", "качение с внешней касательной силой", "качение с проскальзыванием", "пульсирующий контакт". При этом для режима "пульсирующий контакт", для которого характерно принципиальное отсутствие проскальзывание тел как абсолютно жестких, уровень допускаемых напряжений рекомендуется снижать на 25-30% [3]. Подтверждением этому служат известные эксперименты С.В. Пинегина [4], когда первичная трещина возникала не в центре мгновенного пятна контакта, где давления максимальны, а по его

периферии, при этом наблюдались следы оплавления. В работе [2] выдвинуто предположение, что причиной указанных дефектов являются концентрации касательных напряжений трения в области раздела зон проскальзывания, сцепления в пределах мгновенного пятна контакта. Таким образом, интересной является задача определения областей проскальзывания и сцепления.

Исследование данного типа задач предусматривает решение, как правило, контактных задач теории упругости. Сложность данной задачи в том, что из-за наличия трения область контакта разбивается на части, где реализуется сцепление или имеет место проскальзывание контактирующих тел. Граница, отделяющая одну часть от другой, неизвестна, подлежит определению в ходе решения задачи. В данной работе рассматривается пространственная контактная задача качения упругого тела по упругому основанию при наличии трения. Для решения контактных задач с неизвестной границей, как правило, используются методы линейного программирования, метод проекции градиента и вариационные методы [1, 5]. Идея решения такой задачи состоит в определении экстремального или стационарного решения соответствующего функционала. При численном исследовании задач данного типа обнаруживаются значительные сложности. В данной работе предложен некоторый численный алгоритм для решения задач с неизвестными границами с использованием генетического алгоритма. Генетический алгоритм (ГА) – это метод решения задач оптимизации на основе естественного отбора. Генетические операции (скрещивание, мутация, выбор) напоминают процесс наследования генов при создании нового отпрыска в каждой генерации. Достоинством данного метода является то, что ГА представляет собой класс поисковых методов общего назначения, которые комбинируют элементы существующих поисковых стратегий эксплуатации наилучшего решения (градиентный метод) и исследования пространства решений (случайный поиск). Кроме того, ГА не имеет значительных математических требований к видам целевых функций и ограничений. Эволюционные операции генетических алгоритмов позволяют эффективно отыскивать глобальный оптимум.

В данном случае в качестве неизвестной границы выступает область сцепления.

Рассмотрим пространственную контактную задачу качения упругого тела по упругому основанию при наличии трения.

$\mathbf{\Omega}$ – абсолютная угловая скорость катящегося тела, представляющего собой тело вращения относительно некоторой оси, скорость точек которой V постоянна. Если отсутствует нагрузка, то тело и основание контактируют в точке O, где их мгновенные скорости совпадают, то есть реализуется чистое качение. Под нагрузкой тело и основание контактируют по некоторой области, на части которой происходит проскальзывание (относительные скорости отличны от нуля), в остальных точках, где скорости тел одинаковы, имеет место сцепление.

Будем считать размеры области контакта малыми, снесем граничные условия на общую касательную плоскость, проходящую через точку O. Тела заменим упругими полупространствами, ограниченными той же плоскостью (см. рисунок 1).

Проекцию области контакта на эту плоскость назовем площадкой контакта.

Введем декартову систему координат $OXYZ$, ось X направлена в сторону качения, плоскость Z=0 – касательная плоскость с контактирующим телом.

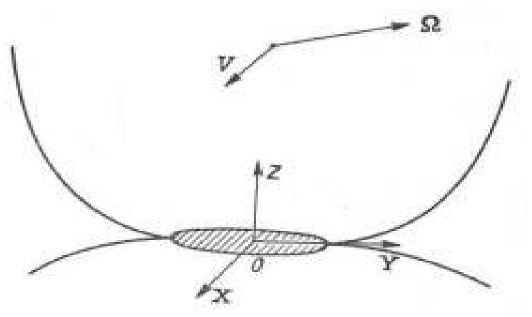

Рисунок 1 – К постановке контактной задачи качения упругого тела по основанию

Будем считать скорости движения тел малыми, а процесс качения стационарным, материалы тел будем считать одинаковыми.

Зона контакта (E) делится на зоны проскальзывания (E+) и сцепления (E0): $E=E+\cup E0$.

По закону трения Кулона для элемента площадки контакта в области сцепления выполняется: $|\tau|\leq p\mu$. А в области проскальзывания $|\tau|= p\mu$.

Здесь τ – касательное напряжение, p – давление, а μ – коэффициент трения. По направлению τ совпадает с $s(sX,sY)$. $s(sX,sY)$ – вектор скорости проскальзывания верхнего тела относительно нижнего. Тогда задача заключается в отыскании решения однородных уравнений равновесия упругой среды в полупространствах Z>0 и Z<0, удовлетворяющего на границе условиям

$$w^{+}(x,y)-w^{-}(x,y)=\delta-f^{+}(x,y)-f^{-}(x,y)=F(x,y),\ p(x,y)\geq 0,(x,y)\in E\ ; \quad (1)$$

$$w^{+}(x,y)-w^{-}(x,y)>F(x,y),\ p(x,y)=0,(x,y)\in E\ ; \quad (2)$$

$$|s(x,y)|>0,|\tau(x,y)|\leq \mu p(x,y)s(x,y)/|s(x,y)|,(x,y)\in E_{+}\ ; \quad (3)$$

$$|s(x,y)|=0,|\tau(x,y)|\leq \mu p(x,y),(x,y)\in E_{0}\ , \quad (4)$$

где w+ и w– – упругие нормальные смещения точек верхнего и нижнего тел; δ – их нормальное сближение; f+ и f– – функции, описывающие форму тел в окрестностях O.

(1) и (2) определяют зону контакта E, (3) и (4) – закон трения, определяя тем самым области сцепления и проскальзывания.

По теореме Спектора в [1] задача сводится к отысканию экстремального значения функционала:

$$\mathrm{F}=\int\limits_{\text{зона контакта}}\left[\mu p|s(\tau)|-\tau\cdot s(t)\right]dxdy$$

при $|\tau|\leq p\mu$.

Этот функционал можно преобразовать к виду:

$$\mathrm{F}=\int\limits_{\text{зона контакта}}\left[\mu p|s(\tau)|-\tau\cdot v\right]dxdy.$$

Здесь v – известная функция, определяющая относительную скорость.

Таким образом, неизвестная граница находится из условий минимума функционала F.

Алгоритм решения задачи:

1. $0\leq x\leq K$, $0\leq y\leq L$. Задаем K, L, h – шаг разбиения, μ.
2. Решение отыскивается в классе кусочно-постоянных функций.
3. Путем преобразований в [1] получаем выражение для интеграла

$$\mathrm{F}=\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=0}^{L}\mu p(x_k,y_l)\sqrt{s_X^2(x_k,y_l)+s_Y^2(x_k,y_l)}-v_X(x_k,y_l)\tau_{XZ}(x_k,y_l)-v_Y(x_k,y_l)\tau_{YZ}(x_k,y_l).$$

4. Запускаем для функционала генетический алгоритм.

Таким образом, разработан численный алгоритм, который позволяет найти положение свободной границы, определяемое из условия минимальности соответствующего функционала. Экспериментально было выявлено, что увеличение скорости проскальзывания приводит к вырождению области сцепления E_0 (см. рисунок 2) и возрастанию коэффициента трения [1]. Разработанный алгоритм позволяет определить области сцепления E_0. Таким образом, показано (см. рисунок 2), что контактная концентрация касательных напряжений трения качественно соответствует области локализации питтингов в околополюсной зоне эвольвентных передач.

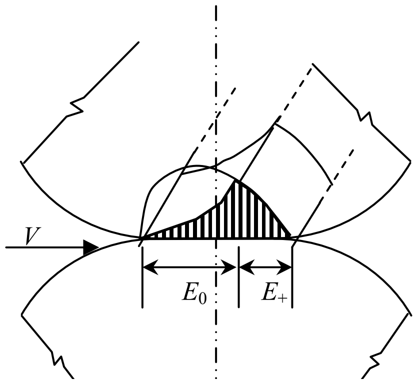

Рисунок 2 – Распределение касательных напряжений при качении цилиндров

Список литературы: **1.** *Гольдштейн Р.В., Зазовский А.Ф., Спектор А.А., Федоренко Р.П.* Решение вариационными методами пространственных контактных задач качения с проскальзываение и сцеплением // Успехи механики. – 1982. – №3. – С.61-100. **2.** *Онишков П.Н., Островский Д.В.* К оценке контактно-усталостной долговечности полюсной зоны (Сообщение 1) // Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов. Тематический выпуск "Проблемы механического привода". – Харьков, 2011. – №28. – С.106-110. **3.** *Орлов А.В., Черменский О.Н., Нестеров В.М.* Испытание материалов на контактную усталость. – М.: Машиностроение, 1980. – 110с. **4.** Влияние внешних факторов на контактную прочность при качении / *Под ред. С.В. Пинегина.* – М.: Наука, 1972. – 102с. **5.** *Калкер Й.* Принцип минимума для закона сухого трения с приложением к задаче о качении упругих цилиндров. Основные положения // Прикладная механика. Труды Америк. Общества инженеров-механиков. – 1971. – С.160-166. **6.** *Bhattacharya K., Kohn R.V.* // Arch. Rational Mech. Anal. 1997. 139, 99-180. **7.** *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука, 1985. **8.** *Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н.* MATLAB7. – СПб.: Изд. БХВ-Петербург, 2005. –255с.

Поступила в редколлегию 03.05.12